DIM0436

8. Conjuntos, relações e funções

Richard Bonichon

20140814

Sumário

Definição

Definição (Conjunto)

- Um conjunto e qualquer coleção bem definida de objetos.
- Se A é um conjunto, objetos de A são os elementos / membros
- $x \in A = x$ elemento de A.

Exemplos

- $\mathbb{N}$: naturais
- $\mathbb{Z}$: inteiros
- $\mathbb{Q}$: racionais

Operadores de conjuntos

União

$\$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{\mathrm{x} \mid \mathrm{x} \in \mathrm{A} \vee \mathrm{x} \in \mathrm{B}\}$

Interseção

$\$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{\mathrm{x} \mid \mathrm{x} \in \mathrm{A} \wedge \mathrm{x} \in \mathrm{B}\}$

Diferença

- $A \backslash B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$
- também notado $\bar{B}$, o complemento de B em A

Diagramas de Venn representam de maneira gráfica esses operadores.

Representação

Em extensão

- $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$
- $\{0, 2, 4, 6, ..., 2n\}$

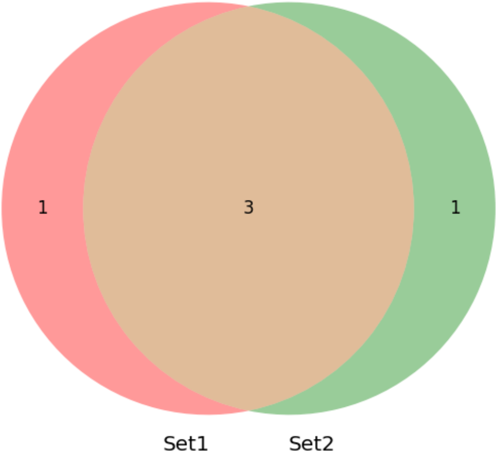
Em compreensão

- $\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$
- $\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 2\}$

Extensão

$\mathbb{Q} = \{m/n \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$

Diagramas de Venn



Conjunto vazio

- $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0\}$
- $\emptyset = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 2\}$
- $\emptyset = \{x | x \neq x\}$
- $\emptyset \neq \{\emptyset\}$
- $\emptyset \in \{\emptyset\}$

Subconjunto

Subconjunto

$A \subseteq B$ se todo elemento de A pertence a B.

Conjunto de partes

O conjunto de partes de A é o conjunto de todos os subconjuntos de A (notado $\mathcal{P}(A)$).

Exercícios

- Mostre que $A \subseteq B \iff \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$
- Mostre por indução que um conjunto com n elementos tem 2^n subconjuntos.
- Seja $A = \{o, t, f, s, e, n\}$. Dê uma definição alternativa de A.

Teoremas

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ ()
2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C)$
4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C)$
5. $A \cup B = B \cup A$
6. $A \cap B = B \cap A$
7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
8. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
9. $A \cup \overline{A} = U$
10. $A \cap \overline{A} = \emptyset$
11. $\overline{\overline{A}} = A$

Intervalos

Intervalo fechado

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

Intervalo aberto

$(a, b) =]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

Exercício

Mostre que a interseção de dois intervalos é um intervalo. É a mesma coisa para uniões?

Produto Cartesiano

Par ordenado

- O par ordenado de objetos matemáticos cuja ordem de ocorrência desses objetos é significante.
- Os pares (a, b) e (x, y) sse $a = x$ e $b = y$

Produto Cartesiano

$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge a \in B\}$

Teoremas

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
3. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$
4. $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$

Exercício

Mostre que $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$ não pode ser a identidade.

Problemas

Problema inicial

Considere um hotel hipotético com infinitos quartos, todos ocupados - isto é, todos os quartos contêm um hóspede. Suponha que um novo hóspede chega e gostaria de se acomodar no hotel. Como o gerente pode fazer ?

Problema segundo

A próxima noite, os quartos ficam todos ocupados. Um número infinito de hóspedes chegam sem reservações. Como o gerente pode fazer ?

Contradição

Seja $R = \{x \mid x \neq x\}$.
Mostre que a hipótese que R é bem definido leva a uma contradição.

Famílias indexadas

Usos

- $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$
- $\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} A_i = \{a \mid \exists i \in I, a \in A_i\}$

Características

Domínio e contradomínio

Se $f : A \rightarrow B$

- A é o domínio
- B é o contradomínio

Números de valores

Uma função produz no máximo um valor (exatamente um valor).

Bijetividade

Injetividade

- $\forall a, b \in A, a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$
- $\forall a, b \in A, f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

Sobrejetividade

$\forall b \in B, \exists a \in A, f(a) = b$

Bijetividade

Uma função é bijetiva/bijetora se ela é injetiva e sobrejetiva/sobrejetora.

Exercícios

1. Seja $f : A \to B$ uma função injetora. Mostre que $\forall C, D \subseteq A$
    1. $f[C \cap D] = f[C] \cap f[D]$
    2. $f[C \backslash D] = f[C] \backslash f[D]$
2. A composição de funções injetoras é injetora e a composição de funções sobrejetoras é sobrejetora.

Outros elementos

Composição

$g \circ f(x) = g(f(x))$

Inversa

Seja $f : A \to B$. f é inversível se $\exists g : B \to A$ tal que

$$f(a) = b \iff g(b) = a$$

.

Exercício

Mostre que f é inversível sse f é uma bijeção.

Conjunto contável/enumerável

Definição :B_{block}

- Um conjunto A é contável se existe um função injetora $f : A \to \mathbb{N}$ ($card(A) = |A|$ da o número de elementos de A)
- Se f for também sobrejetora, A é infinito contável.

Exercícios

1. Mostre que $\mathbb{Z}$ é infinito contável .
2. Mostre que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é infinito contável/enumerável.

Ponto fixo

Definição

Um ponto fixo de uma função $f : A \rightarrow A$ é um valor a tal que:

$$f(a) = a$$

Observação

Um ponto fixo pode ser visto como:

- um ponto de equilíbrio de uma função
- um ponto de convergência de uma função

Relação binária

Relação como conjunto

- $\hat{R} = \{(a, b) \in A \times B \mid R(a, b)\}$
- $\hat{R} \subseteq A \times B$

Reflexividade

- $\forall a \in A, (a, a) \in R$
- $\forall$ a $\in$ A, aRa

Simetria

- $\forall$ a,b $\in$ A, (a, b) $\in$ R $\Rightarrow$ (b, a) $\in$ R
- $\forall$ a,b $\in$ A, aRb $\Rightarrow$ bRa

Transitividade

- $\forall$ a,b,c $\in$ A, (a, b) $\in$ R $\wedge$ (b, c) $\in$ R $\Rightarrow$ (a, c) $\in$ R
- $\forall$ a,b,c $\in$ A, aRb $\wedge$ bRc $\Rightarrow$ aRc

Relação de equivalência

Definição

Uma relação R em um conjunto A é uma relação de equivalência se ela é:

1. reflexiva

Classe de equivalência

Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A. Para qualquer $a \in A$, a classe de equivalência de a é

$$[a] = \{b \in A \mid R(a, b)\}$$

Relação de equivalência

Definição

Uma relação R em um conjunto A é uma relação de equivalência se ela é:

1. reflexiva
2. simétrica

Classe de equivalência

Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A. Para qualquer $a \in A$, a classe de equivalência de a é

$$[a] = \{b \in A \mid R(a, b)\}$$

Relação de equivalência

Definição

Uma relação R em um conjunto A é uma relação de equivalência se ela é:

1. reflexiva
2. simétrica
3. transitiva

Classe de equivalência

Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A. Para qualquer $a \in A$, a classe de equivalência de a é

$$[a] = \{b \in A \mid R(a, b)\}$$

Exercício

Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A. Mostre que

1. $\forall a \in A, a \in [a]$
2. $\forall a, b \in A, R(a, b) \iff [a] = [b]$
3. $\forall a, b \in A, \neg R(a, b) \Rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$
4. Dadas duas classes de equivalência, elas são ou iguais ou disjuntas.

Relação bem-fundada

Definição

Seja R uma relação binária em A. R é bem-fundada se

- $\forall B \subseteq A, B \neq \emptyset, \exists b \in B, \exists a \in B, R(a, b)$
- não existe uma sequência infinita $(a_n) \in A$ tal que $\forall n, R(a_{n+1}, a_n)$

Partição

Definição

Uma partição de um conjunto A é uma coleção $\mathcal{F}$ de subconjuntos de A dois a dois disjuntos (i.e. $\forall B, C \in \mathcal{F}, B \neq C, B \cap C = \emptyset$) tal que

- $A = \bigcup \mathcal{F}$

Exercício

Mostre que a coleção das classes de equivalência de um conjunto A é uma partição de A

Teorema (Relação de equivalência)

Seja $\mathbb{F}$ uma partição de A e R uma relação em A tal que

$$R(a,b) \iff (\exists B \in \mathcal{F}), a, b \in B$$

Então R é uma relação de equivalência em A. As classes de equivalência de R são precisamente os conjuntos na partição de $\mathbb{F}$.

Funções como relações

Definição

Seja $f : A \to B$

$$\hat{f} = \{(a, b) \in A \times B | f(a) = b\}$$

Propriedade adicional

$$\forall a \in A, \exists! b \in B, (a, b) \in \hat{f}$$

Ordens

Ordem parcial

Uma relação binária é uma ordem parcial $\leqq$ no conjunto A se ela é

1. reflexiva

Ordem parcial estrita

Uma ordem parcial estrita $<$ é uma relacão binária

Ordens

Ordem parcial

Uma relação binária é uma ordem parcial $\leqq$ no conjunto A se ela é

1. reflexiva
2. transitiva

Ordem parcial estrita

Uma ordem parcial estrita $<$ é uma relacão binária

Ordens

Ordem parcial

Uma relação binária é uma ordem parcial $\leqq$ no conjunto A se ela é

1. reflexiva
2. transitiva
3. antissimétrica $\forall a, b \in A, a \leqq b \land b \leqq a \Rightarrow a = b$

Ordem parcial estrita

Uma ordem parcial estrita $<$ é uma relacão binária

Ordens

Ordem parcial

Uma relação binária é uma ordem parcial $\leqq$ no conjunto A se ela é

1. reflexiva
2. transitiva
3. antissimétrica $\forall a, b \in A, a \leqq b \wedge b \leqq a \Rightarrow a = b$

Ordem parcial estrita

Uma ordem parcial estrita $<$ é uma relacão binária

1. antirreflexiva $\forall a \in A, a \nless a$

Ordens

Ordem parcial

Uma relação binária é uma ordem parcial $\leqq$ no conjunto A se ela é

1. reflexiva
2. transitiva
3. antissimétrica $\forall a, b \in A, a \leqq b \wedge b \leqq a \Rightarrow a = b$

Ordem parcial estrita

Uma ordem parcial estrita $<$ é uma relacão binária

1. antirreflexiva $\forall a \in A, a \nless a$
2. transitiva

Ordens

Ordem parcial

Uma relação binária é uma ordem parcial $\leqq$ no conjunto A se ela é

1. reflexiva
2. transitiva
3. antissimétrica $\forall a, b \in A, a \leqq b \wedge b \leqq a \Rightarrow a = b$

Ordem parcial estrita

Uma ordem parcial estrita $<$ é uma relacão binária

1. antirreflexiva $\forall a \in A, a \not< a$
2. transitiva
3. assimétrica $\forall a, b \in A, a < b \Rightarrow b \not< a$

Ordem total

Ordem total

Uma ordem é total se

$$\forall a, b \in A, a \leqq b \vee b \leqq a$$

Exemplo

- Inclusão é uma ordem parcial, i.e. para todo conjunto A, $\subset$ é uma ordem parcial em $\mathcal{P}(A)$.)
- É total sse $\mathrm{card}(A) \leq 1$

Ordem lexicográfica

Sejam:

- $m, n \in \mathbb{N}$,
- $a_i, b_j \in (A, <_A)$,
- $a, b \in A^\star$

$$a = a_1 ... a_n < b_1 ... b_m = b \text{ se}$$

- $\exists k \leq min(m, n), \forall i < k, a_i =_A b_i \wedge a_k <_A b_k$, ou
- $n \leq m \wedge \forall i \leq n, a_i =_A b_i$ (i.e. a é um prefixo de b)

Conjunto parcialmente ordenado (poset)

Dado um conjunto parcialmente ordenado $(A, \leqq)$

Majorante

$a \in A$ é um majorante de $B \subseteq A$ se $\forall b \in B, b \leqq a$

- $10, 12, 13$ são majorantes de $]0, 10[$

Elemento maximal

a é um elemento maximal de A sse $\forall b \in A, a \leqq b \Rightarrow a = b$

- A é o elemento maximal de $\mathcal{P}(A)$

Supremo

M é um supremo de $B \subseteq A$ se $\forall a \in A, M \leqq a \iff \forall b \in Bb \leqq a$

- 10 é o supremo de $]0, 10[$

Reticulado

Definição

Um reticulado A é um *poset* tal que todo par $(a, b) \in A$ tem um supremo é um ínfimo.

Vocabulário particular

- A operação *join* de a e b ($a \wedge b = sup(\{a, b\})$ define o supremo de (a, b)
- A operação *meet* de a e b ($a \vee b = inf(\{a, b\})$ define o ínfimo de (a, b)

Exemplo

- Seja $A \neq \emptyset$, $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ é um reticulado
  - o supremo é a união dos conjuntos
  - o ínfimo é a interseção
- Qualquer conjunto totalmente ordenado define um reticulado

Axiomas dos reticulados

Seja $a, b, c \in (A, \vee, \wedge)$

- $a \vee b = b \vee a$
- $a \wedge b = b \wedge a$
- $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$
- $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$
- $a \vee (a \wedge b) = a$
- $a \wedge (a \vee b) = a$
- $a \vee a = a$
- $a \wedge a = a$

Exercícios

Seja $(A, \vee, \wedge)$ um reticulado não vazio.

1. Mostre que $\forall a, b \in A, a \vee b \iff a \wedge b = a$
2. Defina $\leq$ tal que $a \leq b$ se $a \vee b = b$. Mostre que $\leq$ é uma relação de ordem.

Reticulado completo

Definição

Um reticulado $(A, \vee, \wedge)$ é completo se $\forall B \subseteq A, \bigvee B$ e $\bigwedge B$ existem.

Teorema (Knaster-Tarski)

- *Seja $(A, \vee, \wedge)$ um reticulado completo é $f : A \rightarrow A$ uma função crescente.*
- *O conjunto de pontos fixos de f em A não é vazio e é um reticulado completo.*
- *f tem um menor é um maior ponto fixo em A*

Resumo

Referências

- Keith Devlin, *The Joy of Sets: Fundamentals of Contemporary Set Theory*, Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology, Springer New York, 1993.
- K.J. Devlin, *Sets, functions, and logic: an introduction to abstract mathematics*, Chapman & Hall mathematics, Chapman & Hall, 2003.
- B.A. Davey and H.A. Priestley, *Introduction to lattices and order*, Cambridge mathematical text books, Cambridge University Press, 2002.
- Y. Moschovakis, *Notes on set theory*, Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology, Springer, 2006.

Perguntas ?

http://dimap.ufrn.br/~richard/dim0436