DIM0436

21. Resolução e método tableaux

20141014

Sumário

Métodos

- Resolução
- Tableaux
- DPLL (Davis-Putnam-Logemann-Loveland)
- Método de Stålmarck
- BDD (Binary Decision Diagrams)
- ...

Observação

- Os métodos operam sobre categorias específicas de fórmula lógicas, **formas normais**.

Formas normais

Um literal é uma proposição atômica ou a negação de uma.

FNC

Uma fórmula proposicional é em formal normal conjuntiva (FNC) se é uma conjunção de disjunções de literais.

FND

Uma fórmula proposicional é em formal normal disjuntiva (FND) se é uma disjunção de conjunções de literais.

Teorema

Toda fórmula proposicional é logicalmente equivalente à

1. *Uma fórmula em FNC, única modulo re-ordenação*
2. *Uma fórmula em FND, única modulo re-ordenação*

Formas normais

Lema

1. *Uma disjunção D de literais é* ***válida*** *sse existe uma proposição P tal que $P \in D$ e $\neg P \in D$*
2. *Uma conjunção C de literais é* ***satisfazível*** *se $P \in C \Rightarrow \neg P \notin C$*

Teorema

1. *A validade duma fórmula em FNC pode ser verificada em tempo linear.*
2. *A satisfazibilidade duma fórmula em FND pode ser verificada em tempo linear.*

Teorema

Uma fórmula A é válida (resp. satisfazível) sse $\neg A$ é satisfazível (resp. válida).

NNF

Definição

Denotamos por A uma proposição atômica e por P, Q proposições arbitrárias.

$$
\begin{aligned}
NNF(A) &= A \\
NNF(\neg A) &= \neg A \\
NNF(\neg\neg P) &= NNF(P) \\
NNF(\neg(P \land Q)) &= NNF(\neg P) \lor NNF(\neg Q) \\
NNF(\neg(P \lor Q)) &= NNF(\neg P) \land NNF(\neg Q) \\
NNF(P \land Q) &= NNF(P) \land NNF(Q) \\
NNF(P \lor Q) &= NNF(P) \lor NNF(Q)
\end{aligned}
$$

FND

- O método tableaux usa uma forma dinâmica de cálculo de formal normal disjuntiva.
- A formal normal disjuntiva é a padronização duma fórmula lógica como disjunção de conjunções.

Definição

A forma normal disjuntiva duma proposição $\mathcal{P}$, já em forma normal de negação.

$$
\begin{array}{rcl}
DNF(A) & = & \{\{A\}\} \\
DNF(\neg A) & = & \{\{\neg A\}\} \\
DNF(P \vee Q) & = & \{DNF(P) \cup DNF(Q)\} \\
DNF(P \wedge Q) & = & \{p \cup q \mid (p, q) \in DNF(P) \times DNF(Q)\}
\end{array}
$$

Exemplo

$$(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \vee S) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \vee S))$$
$$=$$
$$P \wedge (Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg S) \vee ((\neg Q \vee R) \vee S)$$
$$=$$
$$\{P, Q, \neg R\}, \{\neg P, \neg S\}, \{\neg Q\}, \{R\}, \{S\}$$

FNC

Definição (Cláusulas)

Uma **cláusula** é uma conjunção de literais.

Forma normal conjuntiva

A forma normal conjuntiva duma proposição $\mathcal{P}$, já em forma normal de negação.

$$
\begin{array}{rcl}
CNF(A) & = & \{\{A\}\} \\
CNF(\neg A) & = & \{\{\neg A\}\} \\
CNF(P \vee Q) & = & \{p \cup q \mid (p, q) \in CNF(P) \times CNF(Q)\} \\
CNF(P \wedge Q) & = & CNF(P) \cup CNF(Q)
\end{array}
$$

Exemplo

$$(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \vee S) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \vee S))$$

$$=$$

$$P \wedge (Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg S) \vee ((\neg Q \vee R) \vee S)$$

$$=$$

$$\{\neg Q, R, S, \neg P, R\}, \{\neg Q, R, S, \neg P, Q\}, \{\neg Q, R, S, \neg P, \neg R\}$$
$$\{\neg Q, R, S, \neg S, P\}, \{\neg Q, R, S, \neg S, Q\}, \{\neg Q, R, S, \neg S, \neg R\}$$

Exercícios

Assunto

Reduzir en FNC e FND as proposições abaixo:

1. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
2. $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
3. $((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (A \vee B)) \Rightarrow C$
4. $(A \vee B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$
5. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

Resolução proposicional

Origem

- Criado por J.A Robinson (1967)
- Funciona sobre um conjunto de cláusulas após uma transformação das fórmulas em FNC.

Regra

$$\frac{\mathcal{C}_1, A \qquad \mathcal{C}_2, \neg A}{\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2}$$

- $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ são conjuntos de proposições

Método

Seja Φ a proposição a ser provada

1. Negar Φ
2. Reduzir Φ a sua FNC
3. Aplicar a regra de resolução ate obter a cláusula vazia $\square$

Exemplo

Pré-processamento

$$\neg((P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \vee S) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \vee S)))$$
$$=$$
$$(\neg P \vee (\neg Q \vee R) \wedge (P \vee S) \wedge (Q \wedge \neg R) \wedge \neg S$$
$$=$$
$$\{\neg P, \neg Q, R\}, \{P, S\}, \{Q\}, \{\neg R\}, \{\neg S\}$$

Demostração por resolução

$$\cfrac{\cfrac{\{\neg S\} \qquad \{P, S\}}{\{P\}} \qquad \cfrac{\cfrac{\{Q\} \qquad \{\neg P, \neg Q, R\}}{\{\neg P, R\}} \qquad \{\neg R\}}{\{\neg P\}}}{\square}$$

Exercícios

Assunto

Demostre por o método de resolução que:

1. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
2. $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
3. $((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (A \vee B)) \Rightarrow C$
4. $(A \vee B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$
5. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

Unificadores e substituições

Unificador

Um unificador σ de Φ e Ψ é uma substituição tal que

$$\Phi\sigma = \Psi\sigma$$

MGU

O unificador σ de Φ e Ψ é o **unificador mais geral** (mgu), para todo outro unificador σ' de Φ e Ψ, $\sigma' = \sigma \circ \omega$

Extensão de FNC

Quantificadores

$$\begin{aligned} CNF(\exists x\ P(x)) &= CNF(P(c)) \\ CNF(\forall x\ P(x)) &= CNF(P(x')) \end{aligned}$$

Resolução de primeira ordem

Regra

$$\frac{\mathcal{C}_1, L_1 \qquad \mathcal{C}_2, L_2}{(\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2)\sigma}$$

- $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ são conjuntos de proposições
- $\sigma = mgu(L_1, L_2)$

Exemplo

$\forall x\ (P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\exists x\ P(x) \vee \forall x\ Q(x))$

Demostração

$$\neg(\forall x\ (P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\exists x\ P(x) \vee \forall x\ Q(x)))$$

$$\overset{()}{=}$$

$$(\forall x\ (P(x) \vee Q(x)) \wedge (\forall x\ \neg P(x) \wedge \exists x\ \neg Q(x)))$$

$$\overset{CNF()}{=}$$

$$\{P(x), Q(x)\}, \{\neg Q(c)\}, \{\neg P(y)\}$$

$$\dfrac{\dfrac{\{P(x), Q(x)\} \qquad \{\neg Q(c)\}}{\{P(c)\}}\ x \mapsto c \qquad \{\neg P(y)\}}{\square}\ y \mapsto c$$

Exercícios

Assunto

Demostre por o método de resolução que:

1. $\exists x\, (P(x) \Rightarrow \forall y\, P(y))$
2. $\exists y\, (\exists x\, P(x) \Rightarrow P(y))$
3. $(\forall x\, P(x) \lor \forall x\, Q(x)) \Rightarrow \forall x\, (P(x) \lor Q(x))$
4. $\forall x\, (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow \forall x\, P(x) \Rightarrow \forall x\, Q(x)$
5. $(H \land K) \Rightarrow L$
   - $H : \forall x\, \forall y\, R(x, y) \Rightarrow R(y, x)$
   - $K : \forall x\, \forall y\, \forall z\, (R(x, y) \land R(y, z)) \Rightarrow R(x, z)$
   - $L : \forall x\, \forall y\, R(x, y) \Rightarrow R(x, x)$
6. $(A \land B) \Rightarrow C$
   - $A : \forall x\, ((F(x) \land G(x)) \Rightarrow H(x)) \Rightarrow \exists x\, (F(x) \land \neg G(x))$
   - $B : \forall x\, (F(x) \Rightarrow G(x)) \lor \forall x\, (F(x) \Rightarrow H(x))$
   - $C : \forall x\, ((F(x) \land H(x)) \Rightarrow G(x)) \Rightarrow \exists x\, (F(x) \land G(x) \land \neg H(x))$

História

O que é

- O método **tableaux** é um método de prova automática
- O raciocínio fundamental é semântico ...
- Mas pode-se usar como método sintático

Origem

- O nome *tableaux* vem de J. Herbrand
- A base do método foi criado por E.W. Beth (1955)
- A simplificação de R. Smullyan (1968)

Eliminação do corte

A regra lógica do corte

$$\frac{\Gamma, P \vdash Q \qquad \Delta \vdash P}{\Gamma, \Delta \vdash Q}\,\text{Cut}$$

Teorema (Hauptsatz de Gentzen)

Qualquer derivação que possui uma prova no cálculo de sequentes que utiliza a regra do corte também possui uma prova que ***não a utiliza****.*

Regras proposicionais

Regras α

$$\frac{A \wedge B}{\begin{array}{c} B \\ A \end{array}} \qquad \frac{\neg(A \vee B)}{\begin{array}{c} \neg B \\ \neg A \end{array}}$$

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

Regras β

$$\frac{A \vee B}{A \qquad B} \qquad \frac{\neg(A \wedge B)}{\neg A \qquad \neg B}$$

Regra de encerramento

$$\frac{\odot}{\begin{array}{c} \neg A \\ A \end{array}}$$

Método

Seja Φ a proposição a ser provada

1. Negar Φ
2. Reduzir Φ dinamicamente a sua FND **aplicando as regras de tableaux**
3. Tentar aplicar a regra de encerramento em cada ramo.
    1. Se existir um ramo aberto, a fórmula é $\neg\Phi$ é satisfazível (então Φ não é válida)
    2. Se não, $\neg\Phi$ é insatisfazível (então Φ é válida)

Exemplo

$$\frac{\neg((P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \vee S) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \vee S)))}{\begin{array}{c} P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \\ \dfrac{\neg((P \vee S) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \vee S))}{\begin{array}{c} P \vee S \\ \dfrac{\neg((Q \Rightarrow R) \vee S)}{\begin{array}{c} \neg(Q \Rightarrow R) \\ \dfrac{\neg S}{\begin{array}{cc} \dfrac{\neg P}{\begin{array}{cc} \dfrac{P}{\odot} & \dfrac{S}{\odot} \end{array}} & Q \Rightarrow R \end{array}} \end{array}} \end{array}} \end{array}}$$

Exercício

Assunto

Demostre por o método tableaux que:

1. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
2. $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
3. $((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (A \vee B)) \Rightarrow C$
4. $(A \vee B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$
5. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

Ramo aberto e modelo

Teorema

- *Um ramo aberto define um modelo da proposição em entrada.*
- *Esse modelo define um valoração que não satisfaz a fórmula inicial*

Exemplo

$$
\dfrac{(P \vee S) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \vee S)}{\dfrac{\neg P \wedge \neg S}{\begin{array}{c}\neg P \\ \neg S\end{array}} \qquad \dfrac{(Q \Rightarrow R) \vee S}{\dfrac{Q \Rightarrow R}{\neg Q \qquad R} \qquad S}}
$$

Como criar um modelo de um ramo aberto

$$
\begin{array}{c}
(P \vee S) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \vee S) \\
\hline
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
\neg P \wedge \neg S \\
\hline
\neg P \\
\neg S
\end{array}
&
\begin{array}{c}
(Q \Rightarrow R) \vee S \\
\hline
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
Q \Rightarrow R \\
\hline
\begin{array}{cc} \neg Q & R \end{array}
\end{array}
& S
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

Processo

- Para todos os literais que aparecem no ramo:
  - se ele é a negação duma proposição atômica $\neg A$, $A \mapsto 0$
  - se ele é uma proposição atômica A, $A \mapsto 1$
- Para os outros:
  - coloque $A \mapsto 1$

Modelo 1

$P \mapsto 0, S \mapsto 0,$

Modelo 2

$S \mapsto 1$

Modelo 3

$Q \mapsto 0$

Modelo 4

$R \mapsto 1$

Tableaux de primeira ordem

Regras γ

$$\frac{\forall x\ P(x)}{P(t)} \qquad \frac{\neg(\exists x\ P(x))}{\neg P(t)}$$

- t um termo qualquer

Regras δ

$$\frac{\exists x\ P(x)}{P(c)} \qquad \frac{\neg(\forall x\ P(x))}{\neg P(c)}$$

- c uma constante nova

Exemplo

$$
\begin{array}{c}
\neg((\forall x(P(x)\vee Q(x)))\Rightarrow(\exists x\ P(x)\vee\forall x\ Q(x))) \\ \hline
\forall x(P(x)\vee Q(x)) \\
\neg(\exists x\ P(x)\vee\forall x\ Q(x)) \\ \hline
\neg\exists x\ P(x \\
\neg\forall x\ Q(x) \\ \hline
\neg Q(c) \\
\neg P(c) \\ \hline
P(c)\vee Q(c) \\ \hline
\begin{array}{cc} P(c) & Q(c) \\ \hline \odot & \odot \end{array}
\end{array}
$$

Exercício

Assunto

Demostre por o método de resolução que:

1. $\exists x\ (P(x) \Rightarrow \forall y\ P(y))$
2. $\exists y\ (\exists x\ P(x) \Rightarrow P(y))$
3. $(\forall x\ P(x) \vee \forall x\ Q(x)) \Rightarrow \forall x\ (P(x) \vee Q(x))$
4. $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow \forall x\ P(x) \Rightarrow \forall x\ Q(x)$
5. $(H \wedge K) \Rightarrow L$
   - $H : \forall x\ \forall y\ R(x, y) \Rightarrow R(y, x)$
   - $K : \forall x\ \forall y\ \forall z\ (R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z)$
   - $L : \forall x\ \forall y\ R(x, y) \Rightarrow R(x, x)$
6. $(A \wedge B) \Rightarrow C$
   - $A : \forall x\ ((F(x) \wedge G(x)) \Rightarrow H(x)) \Rightarrow \exists x\ (F(x) \wedge \neg G(x))$
   - $B : \forall x\ (F(x) \Rightarrow G(x)) \vee \forall x\ (F(x) \Rightarrow H(x))$
   - $C : \forall x\ ((F(x) \wedge H(x)) \Rightarrow G(x)) \Rightarrow \exists x\ (F(x) \wedge G(x) \wedge \neg H(x))$

Resumo

1. Demostração automática de fórmulas

2. Resolução

3. O método tableaux

Referências

Melvin Fitting, *First-order logic and automated theorem proving, second edition*, Graduate Texts in Computer Science, Springer, 1996.

R.M. Smullyan, *First-order logic*, Dover Books on Mathematics Series, Dover, 1995.

Perguntas ?

http://dimap.ufrn.br/~richard/dim0436